Potpuna vjerojatnost Bayesova formula

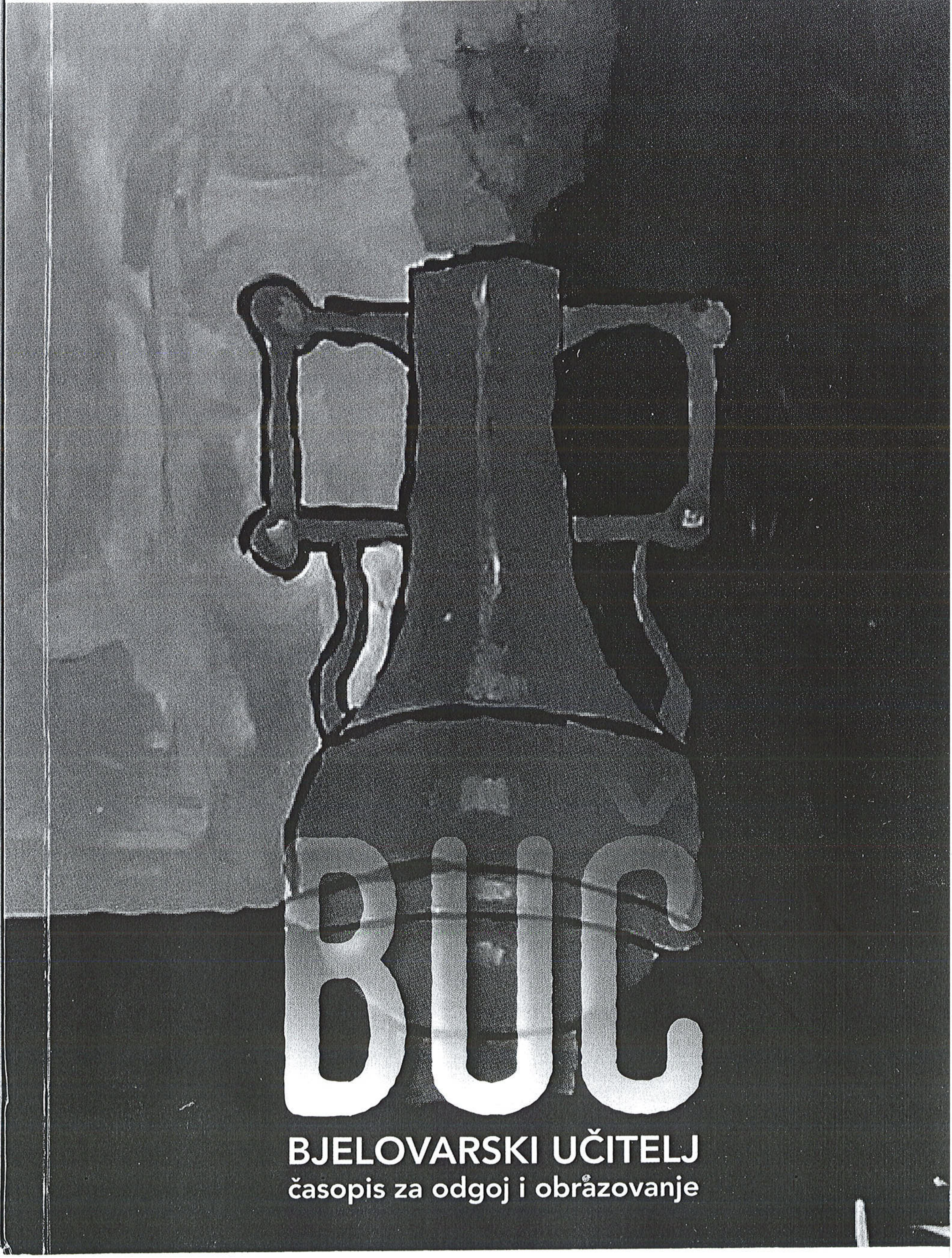
Obradović, Marko; Špoljarić, Marijana; Halusek, Vlado

Source / Izvornik: **Bjelovarski učitelj : časopis za odgoj i obrazovanje, 2017, XXII, 8 - 16**

Journal article, Published version
Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:165:625682

UDK: 37 • God. XXII. • Br. 1-2 • 2017. godina



BUČ

BJELOVARSKI UČITELJ

časopis za odgoj i obrazovanje

Bjelovarski učitelj

časopis za odgoj i obrazovanje

Ogranak
Hrvatskoga pedagoško-književnog zbora
Bjelovar

1 - 2

Bjelovar, siječanj - rujan 2017.

Nakladnik
Ogranak Hrvatskoga pedagoško-književnog zbora Bjelovar

Uredništvo i administracija
Željka Sabola 14, 43000 Bjelovar
Telefon: 091/209 076 3 i 098/985 95 25

Uredništvo
mr. sc. Tatjana Badrov, Bjelovar
Marica Kurtak, prof., Zagreb
Ilija Pejić, prof., Bjelovar
mr. sc. Zorka Renić, Bjelovar
dr. sc. Vladimir Strugar, Bjelovar
Vojislav Kranželić, prof., Bjelovar

Glavne i odgovorne urednice
mr. Zdenka Brebrić i mr. Nataša Ljubić Klemše

Lektorica
Sanja Sabljak, prof.

Prijevod sažetaka na engleski jezik
Mihovil Brebrić, master of Art
Helena Gustović Klemše, dipl. učiteljica

Grafička priprema i tisak
Tiskara Horvat, Bjelovar

Naslovnica
Rad s Likovne radionice u Gradskom muzeju Bjelovar (2016.)

Naklada
200 primjeraka

ISSN 1330-0954

Kazalo

Riječ urednica

STEM područje

Iz pedagoške teorije i prakse

Hrvatska baština

Međunarodna suradnja

Recenzije i prikazi

Intervju

Portret izvrsnosti

Contents

STEM područje

UDK: 51
Stručni članak
Primljeno 5. 7. 2017.

mr. sc. Marko Obradović, *Slatina*
Marijana Špoljarić, mag. educ. math et inf., predavač, *Virovitica*
dr. sc. Vlado Halusek, *Virovitica*

Potpuna vjerojatnost Bayesova formula

Sažetak

Teorija vjerojatnosti prvenstveno se bavi praktičnim problemima i predstavlja teorijsku osnovu statistike. U radu autori navode osnovne pojmove teorije vjerojatnosti, kao što su: elementarni događaj, relativna frekvencija, vjerojatnosni prostor, uvjetna vjerojatnost, slučajni događaj, potpuni (totalni) sustav događaja. Vizualnim primjerom opisuje se Bayesova formula i navode se primjeri primjene Bayesove formule u ekonomiji.

Ključne riječi: vjerojatnost, Bayesova formula, primjena Bayesove formule u ekonomiji

Uvod

Prvu raspravu iz teorije vjerojatnosti inspiriranu problemom Hazardnih igara (kockanja) objavio je talijanski matematičar G. Cardano 1567. godine. No, ozbiljniji razvoj teorije vjerojatnosti potječe od B. Pascala (1623.-1662.), francuskog matematičara i fizičara. Matematičku formulaciju teorije vjerojatnosti dugujemo P. Fermatu, W. Feller, I. Bayesu...

Značajan napredak u izračunavanju teorije vjerojatnosti učinio je Jacob Bernoulli u djelu "Ars Conjectandi" (1713. godine). Ipak, A. N. Kolmogorov je dao sustav aksioma i tako utemeljio teoriju vjerojatnosti kao zasebnu znanstvenu disciplinu (Brückler).

Bayesov teorem je teorem iz teorije vjerojatnosti koji je prvi izrekao Thomas Bayes. Teorem opravdava način razmišljanja u kojem se navodi da se istinitost teorije potvrđuje novim dokazima. To je uvjetna vjerojatnost, vjerojatnost da je jedna pretpostavka istina pod uvjetom da je druga pretpostavka istina. Temljni cilj Bayesovog teorema je formaliziranje informacije kako jedan događaj može pomoći u razumijevanju drugoga. Odnosno, želi se pronaći vjerojatnost ranijeg događaja pod uvjetom da je nastupio kasniji događaj (Barnett i sur. 2006:434).

Bayesov teorem bio je korišten u raznim kontekstima, od biologije oceana do razvoja Bayesovih spamova (klasifikatora), popularne statističke tehnike za filtriranje e-maila. Bayesov klasifikator radi na principu korelacije tipičnih riječi sa spamom ili bez spama u e-mailu i zatim koristi Bayesov teorem kako bi izračunao vjerojatnost da je dobiveni e-mail spam ili nije. Njegovo korištenje primjenjuje se još od devedesetih godina prošlog stoljeća, prije svega zbog svoje prilagođenosti potrebama korisnika i niske cijene.

U filozofiji znanosti Bayesov teorem korišten je u pokušaju razjašnjavanja odnosa teorije i dokaza. Mnoge spoznaje u filozofiji znanosti koje uključuju potvrdu, falsificiranje i vezu između znanosti i kvaziznanosti mogu se ispraviti korištenjem Bayesovog teorema.

Prije definiranja Bayesovog teorema potrebno je ponoviti osnovne pojmove iz vjerojatnosti.

Pojam vjerojatnosti

Osnovni pojam u vjerojatnosti je neprazan skup Ω koji zovemo prostor elementarnih događaja. On reprezentira sve moguće ishode slučajnog pokusa. Elementi u skupu Ω zovu se elementarni događaji. Dakle, događaj je proizvoljni podskup skupa Ω. Pod slučajnim događajem podrazumijevamo svaki podskup A skupa Ω.

Događaj Ω nazivamo siguran događaj, $\emptyset$ zovemo nemoguć događaj, a $\overline{A}$=cA zovemo suprotan događaj događaja A. Općenito, događaj je proizvoljni podskup skupa Ω. Dalje imamo prema formuli $f_r(A) = \frac{n_A}{n}$.

Za relativnu frekvenciju događaja A u nizu od n povoljnih pokusa, u kojoj je A nastupilo n_A puta.

Služi nam kao procjena vjerojatnosti promatranog događaja A. Tada to pišemo:

Ω – siguran događaj

$\emptyset$ – nemoguć događaj

cA=$\overline{A}$ suprotan događaj događaja A.

Kada je skup Ω konačan (diskretan), vjerojatnost slučajnog događaja $A \subseteq \Omega$ u oznaci $P(A)$ definiramo formulom: $P(A) = \frac{m}{n}$.

$P(A)$ – vjerojatnost događaja A

m – ukupan broj povoljnih ishoda (tj. broj elemenata skupa A)

n – ukupan broj mogućih ishoda (tj. broj elemenata skupa Ω).

Definicija 1. (A. Kolmogorova[1])

Funkcija $p{:}P(\Omega) \to \mathbb{R}$ zovemo vjerojatnost na familiji događaja $P(\Omega)$, ako ima svojstva:

1. Za svaki događaj A vrijedi $PA \geq 0$,
2. P($\emptyset$)=0,
3. P(Ω)=1,
4. Ako se događaji A_1, A_2, ..., A_n isključuju (u parovima) tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$, za i≠j, i,j=1,2, ..., n, onda vrijedi:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

No, ako su A i B bilo koja dva događaja, onda vrijedi:

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,

b) $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$,

c) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$,

Napomena 1. Vjerojatnost bilo kojeg događaja, nalazi se u segmentu [0,1].

Uvjetna vjerojatnost

Poopćavajući pojam vjerojatnosti, dobivamo **uvjetnu** vjerojatnost. Naime, običnu vjerojatnost je moguće definirati preko uvjetne vjerojatnosti kao: $P(A) = P(A/\Omega)$.

Definicija 2. Neka je (Ω, $P(\Omega)$, P) vjerojatnosni prostor, $A \subset \Omega, P(A) > 0$.

Tada se vjerojatnost bilo kojeg događaja $B \subset \Omega$, ako je poznato da se događaj A dogodio, definira ovako:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (2)$$

Za događaje A i B kažemo da su nezavisni, ako vrijedi $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$a za $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ da su zavisni. Još to pišemo $P(A \cap B) = P(A \cdot B)$.

Također vrijedi:

1) Ako je: $P(B/A) = P(B/\bar{A})$, A i B su nezavisni događaji.
2) Ako su: $A, B \subseteq \Omega$, onda je $P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B)$.
3) Ako je: $B \neq 0$ onda je $$P(A/B) \geq \frac{P(A) + P(B) - 1}{P(B)}$$

1 A. Kolmogorov (1933-1997) – ruski matematičar

Uređena trojka (Ω, $P(\Omega)$, P) zove se vjerojatnosni prostor. Otuda je: $\mathcal{P}(\Omega) \supseteq \mathcal{A}$ i $\mathcal{A}$ – algebra događaja.

Algebru događaja čine svi podskupovi sigurnog događaja Ω, zajedno sa skupom operacija nad tim podskupom.

Primjer 1. Ako iz kutije u kojoj se nalaze 4 bijele i 6 crvenih kuglica izvučemo odjednom 3 kuglice i ako se zna da su sve 3 izvučene kuglice iste boje, odredite vjerojatnost događaja da su sve 3 izvučene kuglice bijele boje?

- A= {*kuglice su iste boje*}
- B= {*kuglice su bijele boje*}
- Očito je $A \cap B = B$ pa prema formuli (2) je:

$$P(B/A) = \frac{\binom{4}{3} : \binom{10}{3}}{\left[\binom{4}{3} + \binom{6}{3}\right] : \binom{10}{3}} = \frac{1}{6}$$

Sljedeće nužno svojstvo je:

Neka je dan niz događaja A_1, A_2, ..., A_n – to nazivamo razbijanjem događaja Ω, ako je za sve $i \neq j$, $A_i A_j \neq 0$ i $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$.

Ovakva kolekcija događaja čini potpuni sustav događaja i za njega vrijedi formula potpune (totalne) vjerojatnosti.

Propozicija 1. Ako niz A_1, A_2, ..., A_n čini potpun sustav događaja za svaki i $(1 \leq i \leq n)$, $P(A_i) > 0$, onda vrijedi: $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\,P(A_i)$, gdje je $B \subseteq \Omega$ proizvoljan skup.

Dokaz:

Budući da događaj B predstavljamo kao uniju međusobno disjunktnih događaja, to je:

$$B = \sum_{i=1}^{n} A_i B$$

Zbog aditivnosti i definicije vjerojatnosti dobivamo:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i) P(A_i)$$

Dokaz je gotov.

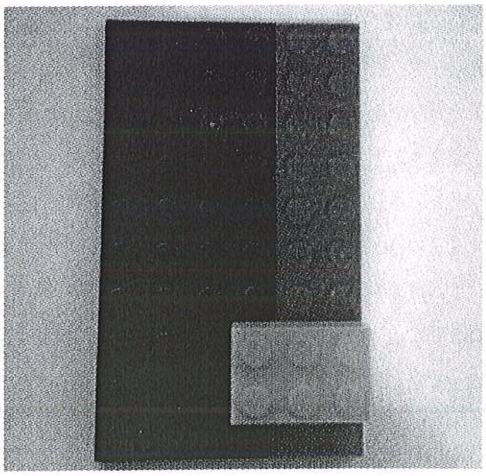
No, ako je $0 < P(A) < 1$, imamo:

$$P(B) = P(B/A)P(A) + P(B/\bar{A}) \cdot P(\bar{A})$$

Bayesova formula

Bayesovu formulu se može ilustrirati LEGO elementima[2], kako je prikazano u primjeru 2.

Primjer 2. Izračunajte kolika je vjerojatnost da se ispod žutog elementa nalazi crveni, ako je dano područje od 6x10 LEGO elemenata, od kojih je 40 plavih i 20 crvenih te 6 žutih elemenata koji prekrivaju crvene i plave kao na slici 1.



Slika 1. 6x10 LEGO elemenata

2 https://www.countbayesie.com/blog/2015/2/18/bayes-theorem-with-lego (10.5.2017.)

Zadano područje od 6x10 LEGO elemenata predstavlja vjerojatnosni prostor koji se sastoji od crvenih, plavih i žutih elemenata. Žuti elementi se nalaze na crvenim i plavim elementima. Pošto je pokrivenost plavim elementima 40, a cijeli prostor je veličine 60, vjerojatnost za plavi element je $P(plavi)=\frac{40}{60}=\frac{2}{3}$.
Primijetite da se prebrojavaju i područja koja su prekrivena žutim elementima. Pokrivenost crvenim elementima je 20, a cijeli prostor je veličine 60, pa je vjerojatnost crvenih elemenata $P(crveni)=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$.
Primijetite da je

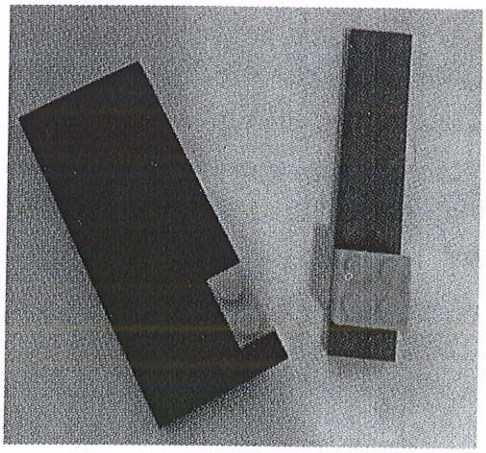
$$P(plavi)+P(crveni)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$$

To znači da crveni i plavi elementi mogu opisati skup mogućih događaja. Pokrivenost žutim elementima je 6, a cijeli prostor je veličine 60. Vjerojatnost žutih elemenata je $P(žuti)=\frac{6}{60}=\frac{1}{10}$.

Pošto žuti elementi prekrivaju jedan dio plavih i crvenih, one se moraju promatrati s njima. Vjerojatnost dobivanja žutih elemenata ovisi o tome razmatrate li one koje su na plavom ili crvenom dijelu promatranog vjerojatnosnog prostora. Vjerojatnost da se žuti nalazi na plavom dijelu vjerojatnosnog prostora označavamo sa *P(žuti/plavi)*, a vjerojatnost sa se žuti nalazi na crvenom dijelu vjerojatnosnog prostora označavamo sa *P(žuti/crveni)*.

Kako bismo odredili *P(žuti/crveni)*, razdvojimo crvene elemente od plavih. Pokrivenost crvenim je 20, a pokrivenost žutim elementima je 4. Dijeljenjem pokrivenosti žutih s pokrivenošću crvenih, dobit ćemo

$$P(žuti/crveni)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}.$$



Slika 2. Razdvojeni LEGO elementi

Tako smo izračunali uvjetnu vjerojatnost žutog i crvenog elementa. Razmotrimo sada što je uvjetna vjerojatnost *P=(crveni/žuti)*, tj. ako smo na žutom dijelu prostora, kolika je vjerojatnost da je ispod njih crveni element.
Sa slike 2. lako se može vidjeti da 6 žutih elemenata prekriva 4 crvena pa je

$$P=(crveni/žuti)=\frac{4}{6}.$$

Na ovaj način došli smo do Bayesovog teorema. Formalizirajmo način izračunavanja da postoji 6 žutih elemenata. Do zaključka smo došli pomoću prostornog zaključivanja, prikazat ćemo ovo matematički. Kako bismo riješili ovaj problem, uzet ćemo da je broj žutih elemenata jednak umnošku vjerojatnosti pojave žutih i ukupnog broja elemenata.

$$Broj\ žutih = P(žuti) \cdot Ukupan\ broj\ elemenata = \frac{1}{10} \cdot 60 = 6.$$

Kako bismo pokazali da je njih 4 nad crvenim, moramo prvo utvrditi koliko je crvenih.

$$Broj\ crvenih = P(crvenih) \cdot Ukupan\ broj\ elemenata = \frac{1}{3} \cdot 60 = 20.$$

Već smo shvatili koliki je broj crvenih prekriven žutima, $P(žuti/crveni)$. Kako bismo izračunali broj žutih elemenata koji prekrivaju crvene, potrebno je pomnožiti vjerojatnost $P(žuti/crveni)$ s brojem crvenih.

$$Broj\ žutih\ koji\ prekrivaju\ crvene =$$
$$P(žuti/crveni) \cdot Broj\ crvenih = \frac{1}{5} \cdot 20 = 4.$$

Na kraju trebamo izračunati $P=(crveni/žuti)$, odnosno broj crvenih koji su prekriveni žutima.

$$P(crveni/žuti) = \frac{broj\ crvenih\ prekrivenih\ žutima}{broj\ žutih} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Da bismo dobili Bayesov teorem, potrebno je proširiti ove jednadžbe.

$$P(crveni/žuti) = \frac{P(žuti/crveni) \cdot broj\ crvenih}{P(žuti) \cdot Ukupan\ broj\ elemenata},$$

$$P(crveni/žuti) = \frac{P(žuti/crveni)P(crveni) \cdot Uk.br.elemenata}{P(žuti) \cdot Uk.br.elemenata}.$$

Iz prethodnog izraza skraćivanjem *Ukupnog broja elemenata* dobiva se jednakost

$$P(crveni/žuti) = \frac{P(žuti/crveni)P(crveni)}{P(žuti)},$$

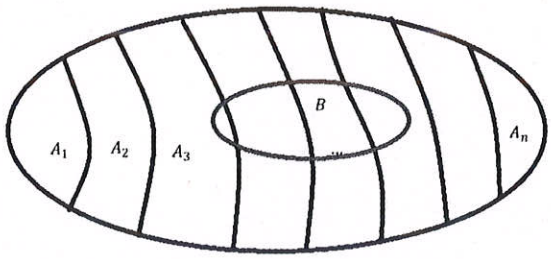
koja nam predstavlja Bayesovu formulu. Bayesova formula služi za a posteriorno izračunavanje vjerojatnosti pojedinih hipoteza A_i, ako je poznato da se događaj dogodio B.

Teorem 1. (fundamentalni)

Ako niz A_1, A_2, ..., A_n čini potpuni sustav događaja, i ako je za svaki $i\ (1 \le i \le n)$, $P(A_i) \ge 0$, onda vrijedi:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \cdot P(B/A_j)}, \text{za } \forall i, (1 \le i \le n) \quad (3)$$

gdje je $B \subseteq \Omega$ proizvoljan događaj. U ovoj formuli A_i predstavlja n hipoteza koje želimo testirati, a B predstavlja novi dokaz koji će opovrgnuti ili potvrditi teoriju. Za svaku pretpostavku S koristit ćemo $P(S)$ kao vjerojatnost da je S istina. Konkretno $P(A_i)$ predstavlja najbolju procjenu vjerojatnosti teorije koju promatramo prije razmatranja novih dokaza. Ona se naziva prethodna vjerojatnost od $\mathbf{A}_i$. Želimo otkriti vjerojatnost da je $\mathbf{A}_i$ istina ako je novi dokaz istina. Promotrimo ilustraciju, sl 3.



Slika 3. Bayesova formula

Dokaz: Budući da je:
$P(A_iB) = P(A_i) \cdot P(B/A_i) = P(B) \cdot P(A_i/B)$
za $1 \le i \le n$, to je također:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(B)}.$$

Po formuli **potpune** vjerojatnosti za događaj B, za svaki $i\ (1 \le i \le n)$, dobivamo: $P(A_i/B) = \dfrac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \cdot P(B/A_j)}$.
Dokaz je gotov.

Napomena 2. Za potpuni sustav koji se sastoji od samo dva događaja, A i

B, pri $PA>0$ i $P(B)>0$, vrijedi formula:

$$P(A/B)=\frac{P(A)\cdot P(B/A)}{P(B)}.$$

Sada kada je poznat Bayesov teorem, potrebno je znati i kada se primjenjuje. Njegova primjena je moguća kada su ispunjeni sljedeći uvjeti[3]:

1. Uzorak je podijeljen u prostor skupova međusobno isključivih događaja $\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\}$
2. Unutar prostora uzoraka postoji događaj B za koji je $PB>0$
3. Cilj je izračunati uvjetnu vjerojatnost oblika $P(A_k/B)$. Pritom je potrebno znati najmanje jedan od dva uvjeta vjerojatnosti:
   i) $P(A_k \cap B)$ za svaki A_k
   ii) $P(A_k)$ i $P(B/A_k)$ za svaki A_k.

Primjena Bayesove formule u ekonomiji

Bayesova formula primjenjuje se i u ekonomiji, što će se pokazati kroz navedene primjere. Sljedeći primjer ilustrira primjenu kod kontrole neispravnosti proizvoda.

Primjer 3. Trgovina "ELEKTRONIKA" d.o.o. nabavlja računala od dva proizvođača P_1 i P_2. Ako od P_1 dopremi 1 000 komada računala, od čega je 5% s greškom, a od P_2 dopremi 700 komada, od čega je 2% s greškom; kolika je vjerojatnost:

a) Da slučajno izabrano računalo ima grešku?
b) Da je slučajno izabrano računalo koje ima grešku od proizvođača P_1?

Neka su događaji:

A= {slučajno izabrano računalo s greškom}

B_i= {slučajno izabrano računalo od proizvođača P_i},

gdje je i=1,2. Otuda imamo:

$$P(B_1)=\frac{1\,000}{17\,000}=\frac{10}{17}, P(B_2)=\frac{7\,000}{17\,000}=\frac{7}{17},$$

pa je $P(A/B_1)$=0,05 i $P(A/B_2)$=0,02. Prema formuli za potpunu vjerojatnost je:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A/B_i)$$

gdje je A – događaj, a $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ čini potpuni prostor događaja, to je:

$$P(A)=\frac{10}{17}\cdot 0{,}05+\frac{7}{17}\cdot 0{,}02=\frac{16}{425}=0{,}03765\ldots$$

b) Koristeći Bayesovu formulu, imamo:

$$P(B_i/A)=\frac{\frac{10}{17}\cdot 0{,}05}{P(A)}=\frac{\frac{5}{170}}{\frac{16}{425}}=\frac{425}{544}=0{,}78125.$$

Upotreba Bayesove formule u financijskim predviđanjima može pomoći pri pročišćavanju procjena vjerojatnosti pomoću intuitivnog procesa. Tako npr. formulu koristimo kako bismo saznali kako promjena kamatnih stopa utječe na vrijednost indeksa burze, kako je opisano u sljedećem primjeru.

Primjer 4. Izračunajte kako bi promjena kamatnih stopa utjecala na

3 http://stattrek.com/probability/bayes-theorem.aspx (10.5.2017.)

vrijednost indeksa burze za podatke prikazane u tablici[4].

		Kamatne stope		
Cijena dionice		Pad	Povećanje	Frekvencija jedinice
	Pad	200	950	1150
	Povećanje	800	50	850
		1000	1000	2000

Tablica 1. Podaci o kamatnim stopama i cijeni dionice

$P(SI)$= *vjerojatnost povećanja indeksa dionice*

$P(SD)$= *vjerojatnost smanjenja indeksa dionice*

$P(ID)$=*vjerojatnost smanjanja kamatne stope*

$P(II)$= *vjerojatnost povećanja kamatne stope.*

Primijenimo Bayesovu formulu, koja će sada, primjenjujući ove oznake, imati oblik

$$P(SD/II) = \frac{P(SD)P(II/SD)}{P(II)}.$$

Uvrstimo zadane podatke u formulu

$$P(SD/II) = \frac{\left(\frac{1150}{2000}\right)\left(\frac{950}{1150}\right)}{\left(\frac{1000}{2000}\right)} = \frac{0.575 \cdot 0.826}{0.5} = 0.9499 \approx 95\%.$$

U tablici je vidljivo da smo promatrali 2 000 dionica od kojih je 1150 pokazalo pad indeksa. Ukoliko izračunamo a priori vjerojatnost, vidimo da je

$$\frac{1150}{2000} = 0.575 \approx 57.5\%.$$

4 http://www.investopedia.com/articles/financial-theory/09/bayesian-methods-financial-modeling.asp (10.5.2017.)

Ova vjerojatnost ne uzima sve informacije o kamatnim stopama. Izračunavanjem uvjetne vjerojatnosti pomoću Bayesove formule dobili smo informaciju o kretanju burze. Odnosno, očekuje se smanjenje od 57.5% do 95%.

Zaključak

Ukoliko se želi pronaći vjeroja-0tnost ranijeg događaja pod uvjetom da je nastupio kasniji događaj, koristi se Bayesov teorem. Razumijevanje Bayesova teorema i uvjeta pri kojima se može koristiti omogućavaju donošenje zaključaka i njegovu lakšu primjenu. U ekonomiji se Bayesov teorem primjenjuje u kontroli neispravnosti proizvoda i financijskim predviđanjima. No, isto tako njegova primjena je sigurno i veća, kao u radovima koji slijede.

Literatura:

- Barnett, R. A., Ziegler, M. R., Byleen, K. E. (2006): *Primijenjena matematika za poslovanje, ekonomiju, znanosti o živom svijetu i humanističke znanosti*. Zagreb: Mate d.o.o., Zagreb
- P.D.T.A. Elliott: *Probabilistic Number Theory*, I, Boulder, Colorado (1979.)

- W. Feller: *Probability Theory and its application*, London, 1964.
- N. Sarapa: *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.
- P. Vranjković: *Zbirka zadataka iz teorije vjerojatnosti i statistike*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.
- https://www.countbayesie.com/blog/2015/2/18/bayes-theorem-with-lego (10.5.2017.)
- http://www.investopedia.com/articles/financial-theory/09/bayesian-methods-financial-modeling.asp (10.5.2017.)
- http://stattrek.com/probability/bayes-theorem.aspx (10.5.2017.)

Complete probability Bayes' Theorem

Summary

The theory of probability primarily deals with practical problems and is the theoretical basis of statistics. In the paper, the authors cite the basic concepts of probability theory such as: elemental event, relative frequency, probability space, conditional probability, random event, complete (total) system of events. A visual example describes the Bayes' Theorem and cites examples of Bayes' Theorem application in the economy.

Keywords: *probability, Bayes' Theorem, Bayes' Theorem application in the economy.*

"Za sve najvažnije stvari tempiranje je uvijek loše. Čekate najbolje vrijeme da date otkaz? Zvijezde se nikad neće poravnati i prometna svjetla života nikad neće biti sva zelena u isto vrijeme. Svemir se nije urotio protiv vas, ali vam neće ni pomoći. Uvjeti nikad nisu savršeni. *Jednog dana* je bolest koja će vaše snove odvesti u grob zajedno s vama. *Za* i *protiv* liste su jednako loše. Ako vam je nešto važno i želite to napraviti *u svoje vrijeme*, jednostavno napravite to odmah i ispravljajte pogrješke usput."

Timothy Ferriss