

# Potpuna vjerojatnost Bayesova formula

---

**Obradović, Marko; Špoljarić, Marijana; Halusek, Vlado**

*Source / Izvornik:* **Bjelovarski učitelj : časopis za odgoj i obrazovanje, 2017, XXII, 8 - 16**

**Journal article, Published version**

**Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:165:625682>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-06**



Veleučilište u Virovitici

*Repository / Repozitorij:*

[Virovitica University of Applied Sciences Repository - Virovitica University of Applied Sciences Academic Repository](#)



DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI

UDK: 37 • God. XXII. • Br. 1-2 • 2017. godina



**BJELOVARSKI UČITELJ**  
časopis za odgoj i obrazovanje



# Bjelovarski učitelj

časopis za odgoj i obrazovanje

Ogranak  
Hrvatskoga pedagoško-književnog zbora  
Bjelovar

1 - 2

*Bjelovar, siječanj - rujan 2017.*



---

***Nakladnik***

Ogranak Hrvatskoga pedagoško-književnog zbora Bjelovar

***Uredništvo i administracija***

Željka Sabola 14, 43000 Bjelovar  
Telefon: 091/209 076 3 i 098/985 95 25

***Uredništvo***

mr. sc. Tatjana Badrov, Bjelovar  
Marica Kurtak, prof., Zagreb  
Ilija Pejić, prof., Bjelovar  
mr. sc. Zorka Renić, Bjelovar  
dr. sc. Vladimir Strugar, Bjelovar  
Vojislav Kranželić, prof., Bjelovar

***Glavne i odgovorne urednice***

mr. Zdenka Brebrić i mr. Nataša Ljubić Klemše

***Lektorica***

Sanja Sabljak, prof.

***Prijevod sažetaka na engleski jezik***

Mihovil Brebrić, master of Art  
Helena Gustović Klemše, dipl. učiteljica

***Grafička priprema i tisak***

Tiskara Horvat, Bjelovar

***Naslovnica***

Rad s Likovne radionice u Gradskom muzeju Bjelovar (2016.)

***Naklada***

200 primjeraka

ISSN 1330-0954

---

# Kazalo

## ☞ Riječ urednica ☞

*mr. Zdenka Brebrić i mr. Nataša Ljubić Klemše, Bjelovar* .....:7

## ☞ STEM područje ☞

*mr. sc. Marko Obradović, Slatina,  
Marijana Špoljarić, mag. educ. math et inf., predavač, Virovitica,  
dr. sc. Vlado Halusek, Virovitica*  
Potpuna vjerojatnost – Bayesova formula ..... 8

*mr. sc. Marko Obradović, Slatina*  
Diskretne vjerojatnosti ..... 17

*Klaudija Aušperger, Bjelovar*  
Poticanje strategije učenja i poučavanja primjerene malim  
skupinama u nastavi kemije “Večeri kemije” ..... 24

## ☞ Iz pedagoške teorije i prakse ☞

*mr. Zdenka Brebrić, Bjelovar*  
Neki elementi samopoštovanja kod učenika, polaznika primarnog  
obrazovanja s naglaskom na učenike s teškoćama u razvoju ..... 29

*Zoran Hercigonja, Varaždin*  
Disciplina i razredno ozračje ..... 43

## ☞ Hrvatska baština ☞

*Mirta Margetić, Bjelovar*  
Dječje likovne radionice kao oblik komunikacije  
baštinskih ustanova..... 55

☞ Međunarodna suradnja ☞

*mr. Nataša Ljubić Klemše, Bjelovar, Tomislav Pavlović, Velika Ludina*  
eTwinning Learning event “Integration of eTwinning  
and KAI projects” ..... 68

☞ Recenzije i prikazi ☞

*dr. sc. Mario Kolar, Zagreb*  
Tekst i kontekst književnosti bjelovarskog područja u 20. stoljeću ..... 76

*Tina Gatalica*  
Književnici – učitelji i knjižničarski program..... 79

☞ Intervju ☞

*Ilija Pejić, Bjelovar*  
Vladimir Strugar – učitelj nade..... 82

☞ Portret izvrsnosti ☞

*Mihael Lilek*  
mr. sc. Marko Obradović – Nastava je proces spoznaje..... 90

*mr. sc. Zorka Renić*  
Nada Crnogorac – profesorica mentorica, pjesnikinja,  
kulturna djelatnica ..... 93

Indeks ključnih riječi ..... 98

O autorima ..... 99

## Contents

### ⇨ Editor's note ⇨

*mr. Zdenka Brebrić i mr. Nataša Ljubić Klemše, Bjelovar* ..... 7

### ⇨ STEM area ⇨

*mr. sc. Marko Obradović, Slatina,  
Marijana Špoljarić, mag. educ. math et inf., predavač, Virovitica,  
dr. sc. Vlado Halusek, Virovitica*  
Complete probability – Bayes' Theorem ..... 8

*mr. sc. Marko Obradović, Slatina*  
Discrete probability – Bernoulli scheme ..... 17

*Klaudija Aušperger, Bjelovar*  
Encouraging learning strategies and tuition appropriate for  
small groups in chemistry classes “Eves of Chemistry” ..... 24

### ⇨ From educational theory and practice ⇨

*mr. Zdenka Brebrić, Bjelovar*  
Some elements of self-esteem in students and  
special need students in primary education ..... 29

*Zoran Hercigonja, Varaždin*  
Discipline and class setting ..... 43

### ⇨ Croatian heritage ⇨

*Mirta Margetić, Bjelovar*  
Children's art workshops as a form of communication  
of heritage institutions ..... 55

### ⇨ International cooperation ⇨

*mr. Nataša Ljubić Klemše, Bjelovar, Tomislav Pavlović, Velika Ludina*  
eTwinning Learning event “Integration of eTwinning  
and KA1 projects” ..... 68

⌘ Reviews ⌘

*dr. sc. Mario Kolar, Zagreb*  
Text and context of literature of the Bjelovar region  
in the 20th century ..... 76

*Tina Gatalica*  
Writers – teachers and library program..... 79

⌘ Interview ⌘

*Ilija Pejić, Bjelovar*  
Vladimir Strugar – the Teacher of hope..... 82

⌘ Portraits of excellence ⌘

*Mihael Lilek*  
mr. sc. Marko Obradović – Teaching is a process of knowledge ..... 90

*mr. sc. Zorka Renić*  
Nada Crnogorac – professor mentor, writer, cultural worker ..... 93

Key words glossary ..... 98

About authors ..... 99



## STEM područje

UDK: 51  
Stručni članak  
Primljeno 5. 7. 2017.

mr. sc. Marko Obradović, Slatina  
Marijana Špoljarić, mag. educ. math et inf., predavač, Virovitica  
dr. sc. Vlado Halusek, Virovitica

# Potpuna vjerojatnost Bayesova formula

### Sažetak

Teorija vjerojatnosti prvenstveno se bavi praktičnim problemima i predstavlja teorijsku osnovu statistike. U radu autori navode osnovne pojmove teorije vjerojatnosti, kao što su: elementarni događaj, relativna frekvencija, vjerojatnosni prostor, uvjetna vjerojatnost, slučajni događaj, potpuni (totalni) sustav događaja. Vizualnim primjerom opisuje se Bayesova formula i navode se primjeri primjene Bayesove formule u ekonomiji.

**Ključne riječi:** vjerojatnost, Bayesova formula, primjena Bayesove formule u ekonomiji

## Uvod

Prvu raspravu iz teorije vjerojatnosti inspiriranu problemom Hazardnih igara (kockanja) objavio je talijanski matematičar G. Cardano 1567. godine. No, ozbiljniji razvoj teorije vjerojatnosti potječe od B. Pascala (1623.-1662.), francuskog matematičara i fizičara. Matematičku formulaciju teorije vjerojatnosti dugujemo P. Fermatu, W. Feller, I. Bayesu...

Značajan napredak u izračunavanju teorije vjerojatnosti učinio je Jacob Bernoulli u djelu "Ars Conjectandi" (1713. godine). Ipak, A. N. Kolmogorov je dao sustav aksioma i tako utemeljio teoriju vjerojatnosti kao zasebnu znanstvenu disciplinu (Brückler).

Bayesov teorem je teorem iz teorije vjerojatnosti koji je prvi izrekao Thomas Bayes. Teorem opravdava način razmišljanja u kojem se navodi da se istinitost teorije potvrđuje novim dokazima. To je uvjetna vjerojatnost, vjerojatnost da je jedna pretpostavka istina pod uvjetom da je druga pretpostavka istina. Temljni cilj Bayesovog teorema je formaliziranje informacije kako jedan događaj može pomoći u razumijevanju drugoga. Odnosno, želi se pronaći vjerojatnost ranijeg događaja pod uvjetom da je nastupio kasniji događaj (Barnett i sur. 2006:434).

Bayesov teorem bio je korišten u raznim kontekstima, od biologije

oceanu do razvoja Bayesovih spamova (klasifikatora), popularne statističke tehnike za filtriranje e-maila. Bayesov klasifikator radi na principu korelacije tipičnih riječi sa spamom ili bez spama u e-mailu i zatim koristi Bayesov teorem kako bi izračunao vjerojatnost da je dobiveni e-mail spam ili nije. Njegovo korištenje primjenjuje se još od devedesetih godina prošlog stoljeća, prije svega zbog svoje prilagođenosti potrebama korisnika i niske cijene.

U filozofiji znanosti Bayesov teorem korišten je u pokušaju razjašnjavanja odnosa teorije i dokaza. Mnoge spoznaje u filozofiji znanosti koje uključuju potvrdu, falsificiranje i vezu između znanosti i kvaziznanosti mogu se ispraviti korištenjem Bayesovog teorema.

Prije definiranja Bayesovog teorema potrebno je ponoviti osnovne pojmove iz vjerojatnosti.

## Pojam vjerojatnosti

Osnovni pojam u vjerojatnosti je neprazan skup  $\Omega$  koji zovemo prostor elementarnih događaja. On reprezentira sve moguće ishode slučajnog pokusa. Elementi u skupu  $\Omega$  zovu se elementarni događaji. Dakle, događaj je proizvoljni podskup skupa  $\Omega$ . Pod slučajnim događajem podrazumijevamo svaki podskup  $A$  skupa  $\Omega$ .

Događaj  $\Omega$  nazivamo siguran događaj,  $\emptyset$  zovemo nemoguć događaj, a  $\bar{A} = cA$  zovemo suprotan događaj događaja  $A$ . Općenito, događaj je proizvoljni podskup skupa  $\Omega$ . Dalje imamo prema formuli  $f_r(A) = \frac{n_A}{n}$ .

Za relativnu frekvenciju događaja  $A$  u nizu od  $n$  povoljnih pokusa, u kojoj je  $A$  nastupilo  $n_A$  puta.

Služi nam kao procjena vjerojatnosti promatranog događaja  $A$ . Tada to pišemo:

$\Omega$  – siguran događaj

$\emptyset$  – nemoguć događaj

$cA = \bar{A}$  suprotan događaj događaja  $A$ .

Kada je skup  $\Omega$  konačan (diskretan), vjerojatnost slučajnog događaja  $A \subseteq \Omega$  u oznaci  $P(A)$  definiramo formulom:  $P(A) = \frac{m}{n}$ .

$P(A)$  – vjerojatnost događaja  $A$

$m$  – ukupan broj povoljnih ishoda (tj. broj elemenata skupa  $A$ )

$n$  – ukupan broj mogućih ishoda (tj. broj elemenata skupa  $\Omega$ ).

**Definicija 1.** (A. Kolmogorova<sup>1</sup>)

Funkcija  $p: P(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  zovemo vjerojatnost na familiji događaja  $P(\Omega)$ , ako ima svojstva:

1. Za svaki događaj  $A$  vrijedi  $PA \geq 0$ ,
2.  $P(\emptyset) = 0$ ,
3.  $P(\Omega) = 1$ ,
4. Ako se događaji  $A_1, A_2, \dots, A_n$  isključuju (u parovima) tj.  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , za  $i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$ , onda vrijedi:

<sup>1</sup> A. Kolmogorov (1933-1997) – ruski matematičar

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

No, ako su  $A$  i  $B$  bilo koja dva događaja, onda vrijedi:

a)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ,

b)  $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$ ,

c)  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ,

Napomena 1. Vjerojatnost bilo kojeg događaja, nalazi se u segmentu  $[0, 1]$ .

## Uvjetna vjerojatnost

Poopćavajući pojam vjerojatnosti, dobivamo uvjetnu vjerojatnost. Naime, običnu vjerojatnost je moguće definirati preko uvjetne vjerojatnosti kao:  $P(A) = P(A/\Omega)$ .

**Definicija 2.** Neka je  $(\Omega, P(\Omega), P)$  vjerojatnosni prostor,  $A \subset \Omega, P(A) > 0$ .

Tada se vjerojatnost bilo kojeg događaja  $B \subset \Omega$ , ako je poznato da se događaj  $A$  dogodio, definira ovako:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (2)$$

Za događaje  $A$  i  $B$  kažemo da su nezavisni, ako vrijedi  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$  za  $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$  da su zavisni. Još to pišemo  $P(A \cap B) = P(A \cdot B)$ .

Također vrijedi:

1) Ako je:  $P(B/A) = P(B/\bar{A})$ ,  $A$  i  $B$  su nezavisni događaji.

2) Ako su:  $A, B \subseteq \Omega$ , onda je

$$P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B).$$

3) Ako je:  $B \neq \emptyset$  onda je

$$P(A/B) \geq \frac{P(A) + P(B) - 1}{P(B)}$$

Uredena trojka  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  zove se vjerojatnosni prostor. Otuda je:  $\mathcal{P}(\Omega) \supseteq \mathcal{A}$  i  $\mathcal{A}$  – algebra događaja.

Algebru događaja čine svi podskupovi sigurnog događaja  $\Omega$ , zajedno sa skupom operacija nad tim podskupom.

**Primjer 1.** Ako iz kutije u kojoj se nalaze 4 bijele i 6 crvenih kuglica izvučemo odjednom 3 kuglice i ako se zna da su sve 3 izvučene kuglice iste boje, odredite vjerojatnost događaja da su sve 3 izvučene kuglice bijele boje?

- $A = \{\text{kuglice su iste boje}\}$
- $B = \{\text{kuglice su bijele boje}\}$
- Očito je  $A \cap B = B$  pa prema formuli

$$(2) \text{ je: } P(B/A) = \frac{\binom{4}{3} : \binom{10}{3}}{[\binom{4}{3} + \binom{6}{3}] : \binom{10}{3}} = \frac{1}{6}$$

**Sljedeće nužno svojstvo je:**

Neka je dan niz događaja  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – to nazivamo razbijanjem događaja  $\Omega$ , ako je za sve  $i \neq j$ ,  $A_i A_j = \emptyset$  i  $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$ .

Ovakva kolekcija događaja čini potpuni sustav događaja i za njega vrijedi formula potpune (totalne) vjerojatnosti.

**Propozicija 1.** Ako niz  $A_1, A_2, \dots, A_n$  čini potpun sustav događaja za svaki  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ),  $P(A_i) > 0$ , onda vrijedi:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B/A_i) P(A_i), \text{ gdje je}$$

$B \subseteq \Omega$  proizvoljan skup.

**Dokaz:**

Budući da događaj  $B$  predstavljamo kao uniju međusobno disjunktih događaja, to je:

$$B = \sum_{i=1}^n A_i B$$

Zbog aditivnosti i definicije vjerojatnosti dobivamo:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i B) = \sum_{i=1}^n P(B/A_i) P(A_i)$$

Dokaz je gotov.

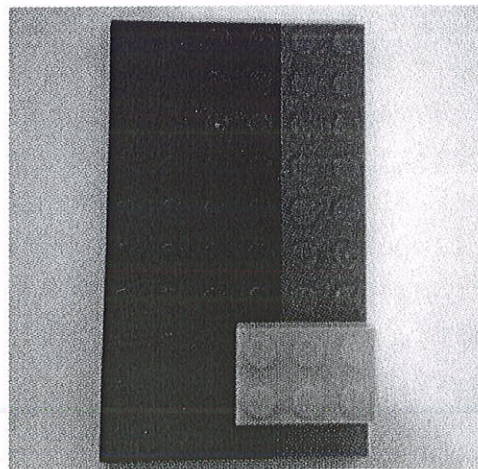
No, ako je  $0 < P(A) < 1$ , imamo:

$$P(B) = P(B/A)P(A) + P(B/\bar{A}) \cdot P(\bar{A})$$

## Bayesova formula

Bayesovu formulu se može ilustrirati LEGO elementima<sup>2</sup>, kako je prikazano u primjeru 2.

**Primjer 2.** Izračunajte kolika je vjerojatnost da se ispod žutog elementa nalazi crveni, ako je dano područje od  $6 \times 10$  LEGO elemenata, od kojih je 40 plavih i 20 crvenih te 6 žutih elemenata koji prekrivaju crvene i plave kao na slici 1.



Slika 1.  $6 \times 10$  LEGO elemenata

<sup>2</sup> <https://www.countbayesie.com/blog/2015/2/18/bayes-theorem-with-lego> (10.5.2017.)

Zadano područje od  $6 \times 10$  LEGO elemenata predstavlja vjerojatnosni prostor koji se sastoji od crvenih, plavih i žutih elemenata. Žuti elementi se nalaze na crvenim i plavim elementima. Pošto je pokrivenost plavim elementima 40, a cijeli prostor je veličine 60, vjerojatnost za plavi element je  $P(\text{plavi}) = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ .

Primijetite da se prebrojavaju i područja koja su prekrivena žutim elementima. Pokrivenost crvenim elementima je 20, a cijeli prostor je veličine 60, pa je vjerojatnost crvenih elemenata  $P(\text{crveni}) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ .

Primijetite da je

$$P(\text{plavi}) + P(\text{crveni}) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

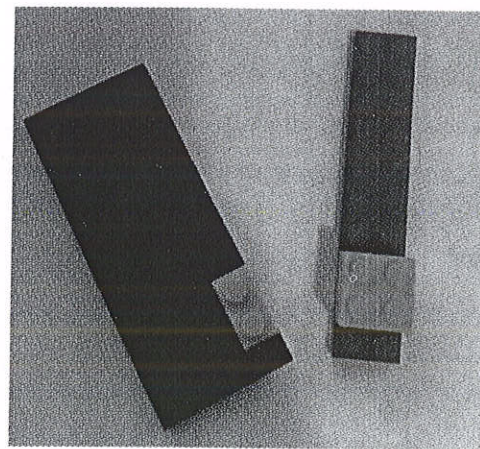
To znači da crveni i plavi elementi mogu opisati skup mogućih događaja. Pokrivenost žutim elementima je 6, a cijeli prostor je veličine 60. Vjerojatnost žutih elemenata je  $P(\text{žuti}) = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$ .

Pošto žuti elementi prekrivaju jedan dio plavih i crvenih, one se moraju promatrati s njima. Vjerojatnost dobivanja žutih elemenata ovisi o tome razmatrate li one koje su na plavom ili crvenom dijelu promatranog vjerojatnosnog prostora. Vjerojatnost da se žuti nalazi na plavom dijelu vjerojatnosnog prostora označavamo sa  $P(\text{žuti/plavi})$ , a vjerojatnost sa se žuti nalazi na crvenom dijelu vjerojatnosnog prostora označavamo sa  $P(\text{žuti/crveni})$ .

Kako bismo odredili  $P(\text{žuti/crveni})$ , razdvojimo crvene elemente

od plavih. Pokrivenost crvenim je 20, a pokrivenost žutim elementima je 4. Dijeljenjem pokrivenosti žutih s pokrivenošću crvenih, dobit ćemo

$$P(\text{žuti/crveni}) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$



Slika 2. Razdvojeni LEGO elementi

Tako smo izračunali uvjetnu vjerojatnost žutog i crvenog elementa. Razmotrimo sada što je uvjetna vjerojatnost  $P = (\text{crveni/žuti})$ , tj. ako smo na žutom dijelu prostora, kolika je vjerojatnost da je ispod njih crveni element.

Sa slike 2. lako se može vidjeti da 6 žutih elemenata prekriva 4 crvena pa je

$$P = (\text{crveni/žuti}) = \frac{4}{6}$$

Na ovaj način došli smo do Bayesovog teorema. Formalizirajmo način izračunavanja da postoji 6 žutih elemenata. Do zaključka smo došli pomoću prostornog zaključivanja, prikazat ćemo ovo matematički. Kako bismo riješili ovaj problem, uzet ćemo da je broj žutih elemenata jednak umnošku

vjerojatnosti pojave žutih i ukupnog broja elemenata.

$$\text{Broj žutih} = P(\text{žuti}) \cdot \text{Ukupan broj elemenata} = \frac{1}{10} \cdot 60 = 6.$$

Kako bismo pokazali da je njih 4 nad crvenim, moramo prvo utvrditi koliko je crvenih.

$$\text{Broj crvenih} = P(\text{crvenih}) \cdot \text{Ukupan broj elemenata} = \frac{1}{3} \cdot 60 = 20.$$

Već smo shvatili koliki je broj crvenih prekriven žutima,  $P(\text{žuti/crveni})$ . Kako bismo izračunali broj žutih elemenata koji prekrivaju crvene, potrebno je pomnožiti vjerojatnost  $P(\text{žuti/crveni})$  s brojem crvenih.

Broj žutih koji prekrivaju crvene =

$$P(\text{žuti/crveni}) \cdot \text{Broj crvenih} = \frac{1}{5} \cdot 20 = 4.$$

Na kraju trebamo izračunati  $P(\text{crveni/žuti})$ , odnosno broj crvenih koji su prekriveni žutima.

$$P(\text{crveni/žuti}) = \frac{\text{broj crvenih prekrivenih žutima}}{\text{broj žutih}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Da bismo dobili Bayesov teorem, potrebno je proširiti ove jednadžbe.

$$P(\text{crveni/žuti}) = \frac{P(\text{žuti/crveni}) \cdot \text{broj crvenih}}{P(\text{žuti}) \cdot \text{Ukupan broj elemenata}}$$

$$P(\text{crveni/žuti}) = \frac{P(\text{žuti/crveni})P(\text{crveni}) \cdot \text{Uk. br. elemenata}}{P(\text{žuti}) \cdot \text{Uk. br. elemenata}}$$

Iz prethodnog izraza skraćivanjem *Ukupnog broja elemenata* dobiva se jednakost

$$P(\text{crveni/žuti}) = \frac{P(\text{žuti/crveni})P(\text{crveni})}{P(\text{žuti})},$$

koja nam predstavlja Bayesovu formulu. Bayesova formula služi za a posteriorno izračunavanje vjerojatnosti pojedinih hipoteza  $A_i$ , ako je poznato da se događaj dogodio  $B$ .

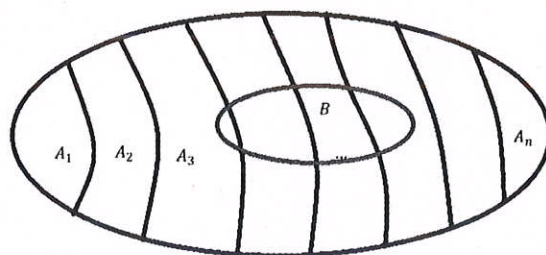
**Teorem 1. (fundamentalni)**

Ako niz  $A_1, A_2, \dots, A_n$  čini potpu-

ni sustav događaja, i ako je za svaki  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ),  $P(A_i) \geq 0$ , onda vrijedi:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j) \cdot P(B/A_j)}, \text{ za } \forall i, (1 \leq i \leq n) \quad (3)$$

gdje je  $B \subseteq \Omega$  proizvoljan događaj. U ovoj formuli  $A_i$  predstavlja  $n$  hipoteza koje želimo testirati, a  $B$  predstavlja novi dokaz koji će opovrgnuti ili potvrditi teoriju. Za svaku pretpostavku  $S$  koristit ćemo  $P(S)$  kao vjerojatnost da je  $S$  istina. Konkretno  $P(A_i)$  predstavlja najbolju procjenu vjerojatnosti teorije koju promatramo prije razmatranja novih dokaza. Ona se naziva prethodna vjerojatnost od  $A_i$ . Želimo otkriti vjerojatnost da je  $A_i$  istina ako je novi dokaz istina. Promotrimo ilustraciju, sl 3.



Slika 3. Bayesova formula

Dokaz: Budući da je:

$$P(A_i B) = P(A_i) \cdot P(B/A_i) = P(B) \cdot P(A_i/B)$$

za  $1 \leq i \leq n$ , to je također:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(B)}.$$

Po formuli potpune vjerojatnosti za događaj  $B$ , za svaki  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), do-

$$\text{bivamo: } P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j) \cdot P(B/A_j)}.$$

Dokaz je gotov.

**Napomena 2.** Za potpuni sustav koji se sastoji od samo dva događaja,  $A$  i

$B$ , pri  $P(A) > 0$  i  $P(B) > 0$ , vrijedi formula:

$$P(A/B) = \frac{P(A) \cdot P(B/A)}{P(B)}$$

Sada kada je poznat Bayesov teorem, potrebno je znati i kada se primjenjuje. Njegova primjena je moguća kada su ispunjeni sljedeći uvjeti<sup>3</sup>:

1. Uzorak je podijeljen u prostor skupova međusobno isključivih događaja  $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$
2. Unutar prostora uzoraka postoji događaj  $B$  za koji je  $P(B) > 0$
3. Cilj je izračunati uvjetnu vjerojatnost oblika  $P(A_k/B)$ . Pritom je potrebno znati najmanje jedan od dva uvjeta vjerojatnosti:
  - i)  $P(A_k \cap B)$  za svaki  $A_k$
  - ii)  $P(A_k)$  i  $P(B/A_k)$  za svaki  $A_k$ .

### Primjena Bayesove formule u ekonomiji

Bayesova formula primjenjuje se i u ekonomiji, što će se pokazati kroz navedene primjere. Sljedeći primjer ilustrira primjenu kod kontrole neispravnosti proizvoda.

**Primjer 3.** Trgovina "ELEKTRONIKA" d.o.o. nabavlja računala od dva proizvođača  $P_1$  i  $P_2$ . Ako od  $P_1$  dopremi 1 000 komada računala, od čega je 5% s greškom, a od  $P_2$  dopremi 700 komada, od čega je 2% s greškom; kolika je vjerojatnost:

<sup>3</sup> <http://stattrek.com/probability/bayes-theorem.aspx> (10.5.2017.)

- a) Da slučajno izabrano računalo ima grešku?
- b) Da je slučajno izabrano računalo koje ima grešku od proizvođača  $P_1$ ?

Neka su događaji:

$A = \{\text{slučajno izabrano računalo s greškom}\}$

$B_i = \{\text{slučajno izabrano računalo od proizvođača } P_i\}$ ,

gdje je  $i=1,2$ . Otuda imamo:

$$P(B_1) = \frac{1\ 000}{17\ 000} = \frac{10}{17}, P(B_2) = \frac{7\ 000}{17\ 000} = \frac{7}{17}$$

pa je  $P(A/B_1) = 0,05$  i  $P(A/B_2) = 0,02$ . Prema formuli za potpunu vjerojatnost je:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A/B_i)$$

gdje je  $A$  – događaj, a  $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$  čini potpuni prostor događaja, to je:

$$P(A) = \frac{10}{17} \cdot 0,05 + \frac{7}{17} \cdot 0,02 = \frac{16}{425} = 0,03765 \dots$$

b) Koristeći Bayesovu formulu, imamo:

$$P(B_1/A) = \frac{\frac{10}{17} \cdot 0,05}{\frac{16}{425}} = \frac{5}{16} = \frac{425}{544} = 0,78125.$$

Upotreba Bayesove formule u financijskim predviđanjima može pomoći pri pročišćavanju procjena vjerojatnosti pomoću intuitivnog procesa. Tako npr. formulu koristimo kako bismo saznali kako promjena kamatnih stopa utječe na vrijednost indeksa burze, kako je opisano u sljedećem primjeru.

**Primjer 4.** Izračunajte kako bi promjena kamatnih stopa utjecala na

vrijednost indeksa burze za podatke prikazane u tablici<sup>4</sup>.

Cijena dionice	Kamatne stope			Frekvencija jedinice
		Pad	Povećanje	
Pad		200	950	1150
Povećanje		800	50	850
		1000	1000	2000

Tablica 1. Podaci o kamatnim stopama i cijeni dionice

$P(SI)$  = vjerojatnost povećanja indeksa dionice

$P(SD)$  = vjerojatnost smanjenja indeksa dionice

$P(ID)$  = vjerojatnost smanjenja kamatne stope

$P(II)$  = vjerojatnost povećanja kamatne stope.

Primijenimo Bayesovu formulu, koja će sada, primjenjujući ove oznake, imati oblik

$$P(SD/II) = \frac{P(SD)P(II/SD)}{P(II)}$$

Uvrstimo zadane podatke u formulu

$$P(SD/II) = \frac{\binom{1150}{2000} \binom{950}{1150}}{\binom{1000}{2000}} = \frac{0.575 \cdot 0.826}{0.5} = 0.9499 \approx 95\%$$

U tablici je vidljivo da smo promatrali 2 000 dionica od kojih je 1150 pokazalo pad indeksa. Ukoliko izračunamo a priori vjerojatnost, vidimo da je

$$\frac{1150}{2000} = 0.575 \approx 57.5\%$$

<sup>4</sup> <http://www.investopedia.com/articles/financial-theory/09/bayesian-methods-financial-modeling.asp> (10.5.2017.)

Ova vjerojatnost ne uzima sve informacije o kamatnim stopama. Izračunavanjem uvjetne vjerojatnosti pomoću Bayesove formule dobili smo informaciju o kretanju burze. Odnosno, očekuje se smanjenje od 57.5% do 95%.

## Zaključak

Ukoliko se želi pronaći vjerojatnost ranijeg događaja pod uvjetom da je nastupio kasniji događaj, koristi se Bayesov teorem. Razumijevanje Bayesova teorema i uvjeta pri kojima se može koristiti omogućavaju donošenje zaključaka i njegovu lakšu primjenu. U ekonomiji se Bayesov teorem primjenjuje u kontroli neispravnosti proizvoda i financijskim predviđanjima. No, isto tako njegova primjena je sigurno i veća, kao u radovima koji slijede.

## Literatura:

- ✦ Barnett, R. A., Ziegler, M. R., Byleen, K. E. (2006): *Primijenjena matematika za poslovanje, ekonomiju, znanosti o živom svijetu i humanističke znanosti*. Zagreb: Mate d.o.o., Zagreb
- ✦ P.D.T.A. Elliott: *Probabilistic Number Theory*, I, Boulder, Colorado (1979.)



- ☞ W. Feller: *Probability Theory and its application*, London, 1964.
- ☞ N. Sarapa: *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.
- ☞ P. Vranjković: *Zbirka zadataka iz teorije vjerojatnosti i statistike*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.
- ☞ <https://www.countbayesie.com/blog/2015/2/18/bayes-theorem-with-lego> (10.5.2017.)
- ☞ <http://www.investopedia.com/articles/financial-theory/09/bayesian-methods-financial-modeling.asp> (10.5.2017.)
- ☞ <http://stattrek.com/probability/bayes-theorem.aspx> (10.5.2017.)

## Complete probability Bayes' Theorem

### Summary

The theory of probability primarily deals with practical problems and is the theoretical basis of statistics. In the paper, the authors cite the basic concepts of probability theory such as: elemental event, relative frequency, probability space, conditional probability, random event, complete (total) system of events. A visual example describes the Bayes' Theorem and cites examples of Bayes' Theorem application in the economy.

**Keywords:** probability, Bayes' Theorem, Bayes' Theorem application in the economy.

☞ "Za sve najvažnije stvari tempiranje je uvijek loše. Čekate najbolje vrijeme da date otkaz? Zvijezde se nikad neće poravnati i prometna svjetla života nikad neće biti sva zelena u isto vrijeme. Svemir se nije urotio protiv vas, ali vam neće ni pomoći. Uvjeti nikad nisu savršeni. *Jednog dana* je bolest koja će vaše snove odvesti u grob zajedno s vama. *Za i protiv* liste su jednako loše. Ako vam je nešto važno i želite to napraviti *u svoje vrijeme*, jednostavno napravite to odmah i ispravljajte pogriješke usput."

Timothy Ferriss